BEWEISEN IN DER UNTERSTUFE, Eduard Szirucsek, Wien

"Beweisen ist Bewirken, daß man erkennt, ein Satz sei wahr."
(Leibniz)

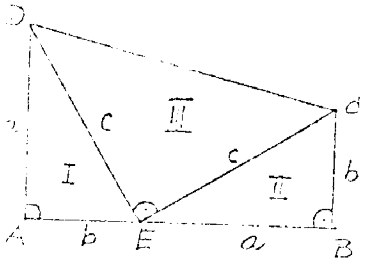
1. Didaktische Grundsätze des Lehrplans

Im derzeit geltenden Lehrplan für die Unterstufe der allgemeinbildenden höheren Schule heißt es u.a.: "Der Übergang von anschaulichen, induktiven Betrachtungsweisen zu abstrakten, deduktiven Denkprozessen darf nur allmählich und der jeweiligen Altersstufe angepaßt erfolgen. Alle verfügbaren Mittel der Veranschaulichung sind, besonders zur Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens, heranzuziehen."

Es ist sicher nicht ungerechtfertigt, diesen Grundsatz auf das Beweisen im Mathematikunterricht anzuwenden. Es stellt sich aber selbstverständlich die berechtigte Frage, wie man Beweise veranschaulichen soll.

2. [illegible]eise des Lehrsatzes von Pythagoras

Es sollen nun an zwei Beweisen des Lehrsatzes von Pythagoras verschiedene Grade der Veranschaulichung gezeigt werden. Zunächst ein Beweis von Garfield:



Das Trapez ABCD setzt sich aus drei Dreiecken zusammen, deren Flächeninhalte sehr leicht berechnet werden können: $A_{I} = \frac{a.b}{2}$; $A_{II} = \frac{a.b}{2}$; $A_{III} = \frac{c^2}{2}$

Für den Flächeninhalt A des Trapezes gilt: $A = \frac{a+b}{2}(a+b)$

Da der Flächeninhalt A des Trapezes gleich ist der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke, gilt weiter:

$$A = A_{I} + A_{II} + A_{III}$$

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = \frac{a\,.\,b}{2} + \frac{a\,.\,b}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{(a+b)^2}{2} = 2\,.\,\frac{a\,.\,b}{2} + \frac{c^2}{2}$$

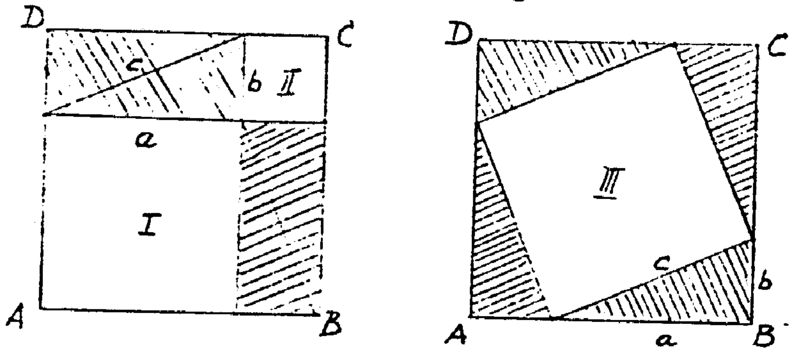
$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

In diesem Beweis müssen einige Ausdrücke mit Variablen umgeformt werden, die wichtigsten Tatsachen über das Umformen von Gleichungen müssen bekannt sein. Der Beweis erfolgt abgesehen von der erläuternden Skizze auf symbolischem Niveau.

Wesentlich anschaulicher ist der sogenannte indische Zerlegungsbeweis:



Weil der Flächeninhalt der beiden gegebenen großen Quadrate ABCD identisch sein muß, folgt wegen der Zerlegungsgleichheit nach Abzug der vier schraffierten kongruenten Dreiecke für die drei verbleibenden Quadrate I, II und III unmittelbar: $A_I + A_{II} = A_{III}$

und somit $a^2 + b^2 = c^2$.

Dieser Beweis vollzieht sich fast ausschließlich auf ikonischem Niveau; er ist sehr anschaulich: Daß die beiden großen Quadrate identisch sind, ist evident; vom Flächeninhalt dieser beiden großen Quadrate wird beide Male der Flächeninhalt von vier jeweils kongruenten Dreiecken abgezogen. Die Flächeninhalte der verbleibenden Figuren müssen daher ebenfalls kongruent sein.

3. Darstellungsmodi

Nach Wittmann unterscheidet man drei Darstellungsmodi: symbolisch (durch Zeichen und Sprache), ikonisch (durch Bilder) und enaktiv (durch Handlungen).

Entwicklungspsychologisch ist der enaktive Modus der erste: Schon in der frühen Kindheit spielen Handlungen eine wesentliche Rolle beim Wissenserwerb. Durch Handlungen erfolgt die erste Erkenntnis der Wirklichkeit; man denke etwa auch an das Greifschema in der frühen Kindheit.

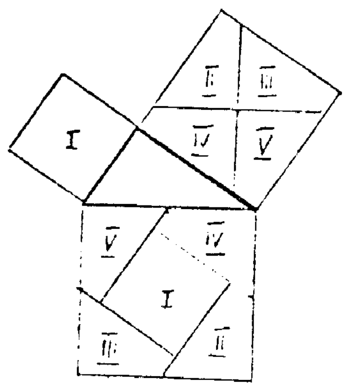
Im ikonischen Modus erfolgt die Erkenntnis durch Bilder. Die Bilder erlauben die simultane Erfassung von Handlungsketten sowie den Vergleich von Handlungen, die konkret nicht gleichzeitig durchführbar sind.

Die symbolische ist die abstrakteste Form der Darstellung; ihr wesentliches Merkmal ist die Verwendung von Symbolen, die für eine Menge von konkreten Dingen stehen und die zu natürlichen oder künstlichen Sprachen zusammengefaßt werden. Entwicklungspsychologisch wird der symbolische Modus als letzter mit dem Erwerb der Muttersprache erreicht.

Es erscheint bedeutsam, darauf hinzuweisen, daß Lernprozesse nur dann auf der symbolischen Ebene gestartet werden sollen, wenn bereits ausreichende symbolische Vorkenntnisse vorliegen. Je jünger das lernende Kind ist, umso eher wird man auf präsymbolische Darstellungsmodi zurückgreifen; dabei wird man in der höheren Schule hauptsächlich mit dem ikonischen Modus auskommen können, bei jüngeren Kindern aber doch gelegentlich auf den enaktiven Modus zurückgreifen. Wichtig ist es, verschiedene Darstellungsmodi gleichzeitig anzuwenden. Das geschieht beispielsweise dann, wenn der Schüler beim Erstellen einer Zeichnung seine Handlungen erläutert.

4. Der Schaufelradbeweis von Perigal

Ein sehr schönes Beispiel für einen Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras ist der Schaufelradbeweis von Perigal: Er besteht darin, daß das größere Kathetenquadrat dadurch in vier Teile geteilt wird, daß man je eine Parallele und eine Normale zur Hypotenuse durch seinen Mittelpunkt zieht.



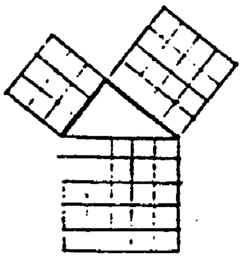
Der Schaufelradbeweis des Perigal kann nun dadurch enaktiv dargestellt werden, daß man Blättchen von der Größe der Teilfiguren I, II, III, IV, V herstellt. Mit diesen Blättchen wird zuerst das Hypotenusenquadrat gebildet, und dann werden sie so verschoben, daß aus ihnen die beiden Kathetenquadrate entstehen; oder umgekehrt. Diese Handlungen können vom Schüler später bei Bedarf immer wieder ausgeführt, aber auch nur vorgestellt, d.h. verinnerlicht durchgeführt werden.

5. Prämathematische Beweise

Semadeni und Kirsch nennen das adäquate Repräsentieren eines Beweises auf enaktivem Niveau einen prämathematischen Beweis. Ein prämathematischer Beweis ist also eine konkrete Handlung, die zuerst wirklich ausgeführt, später aber nur vorgestellt wird und die einem korrekten mathematischen Argument entspricht. Er ist ein beispielgebundenes Begründen, bei dem das Beispiel so gewählt sein muß, daß die Übertragbarkeit auf jeden anderen Fall erkennbar ist und daß somit eine allgemeine Begründungsstrategie vermittelt wird.

6. Prämathematischer Beweis und Verifikation

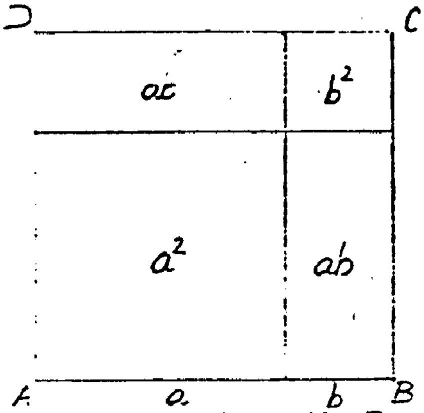
Prämathematische Beweise müssen ganz deutlich von rein experimentellen Verifikationen einiger Sonderfälle und unzulänglichen, rein anschaulichen Begründungen abgegrenzt werden. Als Beispiel einer solchen unzulänglichen Begründung darf die Verifikation des Lehrsatzes von Pythagoras mit Hilfe von Blättchen angeführt werden. Hier darf eine Verifikation mit 25 Blättchen angegeben werden, aus der leicht ersichtlich ist, daß dies nur im angegebenen Spezialfall gilt, sodaß tatsächlich kein prämathematischer Beweis vorliegt:



In diesem Beispiel sieht man sehr deutlich, daß keine allgemeine Begründungsstrategie vermittelt wird und daß eine Übertragbarkeit auf jeden anderen Fall - beispielsweise ein pythagoräisches Dreieck mit irrationaler Seitenlänge - sicherlich nicht gegeben ist.

7. Die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Wir zeichnen ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a + b und zerlegen dieses Quadrat in zwei Quadrate mit den Seitenlängen a bzw. b sowie in zwei Rechtecke mit den Seitenlängen a und b.



Wir können unmittelbar die Formel

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

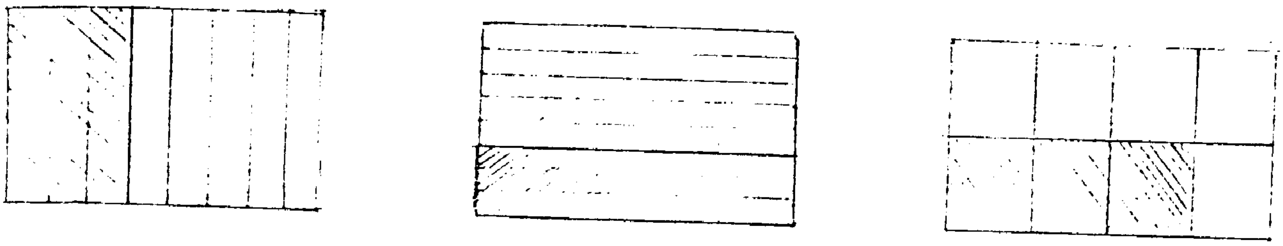
ablesen. Wir haben auch hier eine Form des beispielgebundenen Begründens; allerdings ist die Übertragbarkeit auf jeden anderen Fall mit positiven reellen Zahlen a und b gegeben.

8. Multiplikation von Brüchen

In vielen Lehrbüchern werden Bruchzahlen veranschaulicht; allerdings wird diese Veranschaulichung von Bruchzahlen nur ganz selten dazu verwendet, beispielsweise die Multiplikation von Brüchen prämathematisch zu beweisen. Zunächst sei an folgende wichtige Grundtatsachen erinnert:

Der Nenner gibt an, in wieviele Teile das Ganze zerlegt wird.
Der Zähler gibt an, wieviele gleiche Teile dann genommen werden.

Der Bruch $\frac{3}{8}$ kann daher beispielsweise so dargestellt werden:

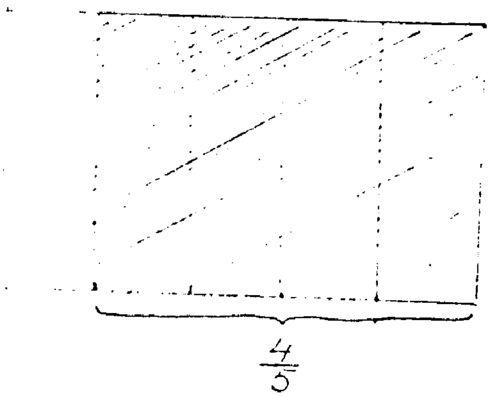


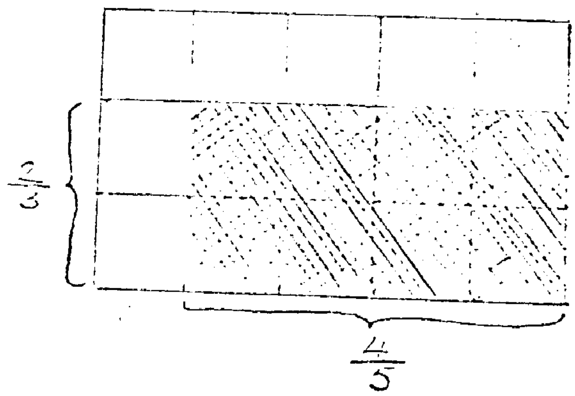
Es scheint wichtig, mehrere Darstellungen desselben Sachverhaltes zu geben, um einseitige Fixierungen zu verhindern.

Nun zur Multiplikation:

Zunächst muß klar sein, daß $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ beispielsweise bedeutet $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$. Dies muß bereits bei der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch, ja sogar schon bei der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen entsprechend vorbereitet werden (Prinzip der Fortsetzbarkeit).

Nun kann auf enaktivem Niveau erklärt werden, wie man $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ erhält:





Beim Abzählen erkennt man:
Im Nenner muß 3.5, also 15, stehen.
Im Zähler muß 2.4, also 8, stehen.

Also gilt: Der Nenner des Produkts muß gleich dem Produkt der Nenner der beiden Faktoren sein. Der Zähler des Produkts muß gleich dem Produkt der Zähler der beiden Faktoren sein. Damit ergibt sich die Formel:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Literatur:

Kirsch, Arnold: Beispiele für "prämathematische" Beweise. In: Dörfler, W.- Fischer, R.: Beweisen im Mathematikunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien; Teubner, Stuttgart.
Oehl, Wilhelm: Der Rechenunterricht in der Hauptschule. Schroedel, Hannover.
Wittmann, Erich: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig.